

# ИЗБОРИ ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

## СВОЈСТВА БРОЈЕВА, РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. Може ли производ два узастопна природна броја да буде 19901989? Зашто?
2. Доказати да је производ два узастопна парна броја дељив са 8.
3. Упростити израз:  $\left(\frac{a^2+b^2}{a}+b\right) : \left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\right)$  ,  $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$  .

## СТЕПЕН, КОРЕН, КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

4. Доказати да је збир ма која узастопна природна степена броја 2 дељив са 6 .
5. Израчунати  $n$  за које је  $n \cdot 10^{-5} = 0,02 \cdot 0,03$  .
6. Израчунати  $0,5^{-1} + 0,25^{-2} + 0,125^{-3} + 0,0625^{-4} =$
7. Израчунати 20% од вредности израза:  $(2^{-1} - 0,4) \cdot \left(0,5^{-4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$
8. Израчунај  $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = ?$
9. Решити једначину:  $|z| - 2z = -1 - 8i$  , где је  $z = x + yi$  .

## КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА, КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА, КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

10. Производ свих реалних решења једначине  $|x^2 - 2x - 3| = x + 1$  је ?
11. Ако су  $x_1$  и  $x_2$  решења квадратне једначине  $2x^2 + x - 1 = 0$  , одредити  $x_1^2 + x_2^2 = ?$
12. Ако су  $x_1$  и  $x_2$  решења квадратне једначине  $x^2 - 2mx + 2 = 0$ . Одредити  $m$  из услова  $(3x_1 - 1) \cdot (3x_2 - 1) = 10$
13. За које  $x$  је  $\frac{1}{x}$  веће од  $\frac{1}{x+1}$  ?
14. Решити једначину :  $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-3} + 1 = 0$
15. Решити систем:  $x^2 + y^2 = 2(xy + 2)$ ,  $x + y = 6$

## ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА , ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА НЕЈЕДНАЧИНА

16. Решити једначину :  $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$  .
17. Решити неједначину :  $x^{3x+1} > x^x$  .
18. За које вредности  $x$  је  $3^{x^2-x-6} < 1$  ?
19. Решити једначину :  $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363$  .

## ЛОГАРИТАМСКА ЈЕДНАЧИНА , ЛОГАРИТАМСКА НЕЈЕДНАЧИНА

20. Израчунати :  $(2\log_5 125) \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2\log_3 9-1} =$

21. Ако је  $\log_{12} 3 = a$  , тада је  $\log_{\sqrt{3}} 8 = ?$

22. Одредити област дефинисаности функције  $y = \log(2x^2 - 5x - 3)$  .

23. Одредити област дефинисаности функције  $y = \log(-2x^2 + 5x + 3)$  .

24. Решити једначину :  $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$

25. Решити једначину :  $x^{\log x} = 100x$

26. Ако је  $\frac{\log(x+1)}{\log 4 - \log 2} = 2$  , колико је  $x$  ?

27. Решити једначину :  $\frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3$

28. Решити неједначину :  $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} < 0$

29. Решити неједначину :  $0,3^{\log \frac{3x-1}{3x+2}} > 1$

30. Одредити све вредности  $x$  за које  $\log \frac{x-1}{x+2} > 0$

31. Решити неједначину :  $\log \frac{x+2}{x} > 1$

## ТРИГОНОМЕТРИЈА

32. Одредити углове правоуглог троугла ако је разлика катета једнака  $\frac{c}{\sqrt{2}}$  ,  
с-хипотенуза.

33. Доказати :  $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$

34. Доказати :  $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\cos(a+b) - \cos(a-b)} = -ctga \cdot ctgb$

35. Доказати :  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} = tg \frac{x}{2}$  .

36. Доказати :  $tg(45^\circ + \alpha) - tg(45^\circ - \alpha) = 2tg 2\alpha$

37. Решити једначину :  $\sin 2x - \cos x = 0$  .

38. Решити једначину :  $\sin 3x = \sin x$

39. Доказати :  $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = tgx$  ,  $tgx \neq -1$

## ПЛАНИМЕТРИЈА , СТЕРОМЕТРИЈА

40. Дуж АВ подељена је у размери 2:3:4. Растојање између средина крајњих делова је 5,4 cm . Колики је мерни број дужине дужи АВ?
41. Полупречник круга је 8 , тетива АВ је 12 . У тачки А повучена је тангента , а из тачке В тетива ВС паралелна са том тангентом . Растојање тетиве ВС од тангенте  $d=?$
42. У троугао је уписан круг полупречника 4 cm. Једна страница тог троугла подељена је тачкама додира на делове 6 cm и 8 cm . Наћи странице троугла .
43. У једнакокраки траpez  $P=20 \text{ cm}^2$  , уписан је круг полупречника  $r=2 \text{ cm}$  . Израчунати странице трапеза .
44. Да ли је троугао чије су странице 10 , 14 , 17 тупоугли ? Зашто ?
45. Одредити површину троугла ABC ако је  $AB=3$  ,  $BC=7$  , а тежишна линија  $BM=4$ .
46. Колика је површина ромба чија је једна дијагонала  $d_1 = 6 \text{ cm}$  , а страница  $a = 5 \text{ cm}$  ?
47. Производ дужине полупречника описаног и уписаног круга једнакостраничног троугла је 8. Одредити О и Р троугла.
48. Основице трапеза су 24 cm и 10 cm , а краци 13 cm и 15 cm. Израчунати површину трапеза.
49. Израчунати површину правоугаоника ако се његове односе као 3:4 , а полупречник описаног круга је 1 dm.
50. Тетива круга износи 30 cm , а њено растојање од центра је 9 cm мање од полупречника тог круга. Колики су  $r$  ,  $O$  и  $P$  тог круга ?
51. Израчунати површину праве купе ако је  $M=15\pi$  , а збир полупречника и изводнице 8.
52. Полупречници основа зарубљене купе и њена изводница односе се 1:2:5 . У ком односу стоје површина те зарубљене купе и површина њеног омотача  $M$  ?
53. Осни пресек праве купе је једнакокраки правоугли троугао . Колика је  $P$  и  $V$  те купе ако њен омотач износи  $81\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$  ?

## ВЕКТОРИ

54. Израчунати дужину висине  $h_s$  пирамиде чија су темена  $A(3,5,3)$  ,  $B(-2,11,-5)$  ,  $C(1,-1,4)$  ,  $S(0,6,4)$  .

## АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- 55.Одредити једначину тангенте хиперболе  $x^2 - 4y^2 = 16$  у њеној тачки  $(5, \frac{3}{2})$ .
- 56.Ако тачке  $A(1,2)$ ,  $B(2,3)$ ,  $C(4,\kappa)$  припадају једној правој онда је  $\kappa$  једнако ?
- 57.Наћи једначину тангенте круга  $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$  која је паралелна са правом  $x-2y-4=0$ .
- 58.Одредити координате тачке  $M$  на кругу  $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$  најближе правој  $3x + y - 12 = 0$ , а затим и растојање тачке  $M$  од те праве.
- 59.Одредити тачку  $A$  симетричну са тачком  $B(-5,13)$  у односу на праву  $2x - 3y - 3 = 0$ .
- 60.Одредити једначине заједничких тангенти кривих :  $y^2 = 8x$  и  $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$ .
- 61.Одредити једначину кружнице чији је центар у пресеку правих  $2x + y - 15 = 0$  и  $x - 3y + 17 = 0$ , а пролази кроз  $A(9,-5)$ .
- 62.Одредити једначину елипсе кроз две тачке  $P(-3, 8)$ ,  $Q(6, -4)$ .
- 63.На правој  $3x - y + 3 = 0$  наћи тачку најближу тачки  $M(2,1)$ .
- 64.Одредити једначине правих које пролазе кроз тачку  $T(2,-5)$ , а паралелне су асимптотама хиперболе  $x^2 - 4y^2 = 4$ .
- 65.За које вредности параметра  $a$  је права  $ax + y - 5 = 0$  тангента елипсе  $9x^2 + 16y^2 = 144$  ?
- 66.Наћи једначину праве која пролази кроз пресек праве  $3x + 2y - 6 = 0$  и ординатне осе, а паралелна је са правом  $x - 2y - 5 = 0$ .

## АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

- 67.Колико чланова аритметичког низа  $5, 9, 13, 17, \dots$  треба сабрати да би се добио збир  $10877$  ?
- 68.У геометријској прогресији је  $a_1 + a_5 = 51$ ,  $a_2 + a_6 = 102$ . За које  $n$  је збир првих  $n$  чланова те прогресије  $3069$  ?

## СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА

$$\begin{aligned} & (a-3)x - 3y + 2z = a \\ 69. \text{ Испитати и решити систем једначина : } & \begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x + y + z = a + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + (4-p)y - z = -1 \\ 70. \text{ Испитати и решити систем једначина : } & \begin{cases} (p-4)x + y - z = p - 6 \\ x - y + (4-p)z = 4 - p \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & px + y + z = 0 \\ 71. \text{ Испитати и решити систем једначина за све вредности параметра } p : & \begin{cases} x + py + z = 0 \\ x + y + pz = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 72. \text{ Испитати и решити систем једначина за све вредности реалног броја } p : & \\ & \begin{cases} x + (p-3)y + 2z = p \\ px + y - z = 1 \\ 5x + 2y + z = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 73. \text{ Испитати и решити систем једначина за све вредности реалног броја } p : & \\ & \begin{cases} px + 2y - 3z = p - 4 \\ x + py + 4z = 1 \\ 6x + 7y + z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

## ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ

74. Израчунати :  $\alpha_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x)$  и  $\alpha_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{8}{(\pi - 2x)^2}}$

75. Израчунати :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{2x^2 + 8} - \sqrt[4]{5x + 6}}{x^2 + x - 6} =$

76. Израчунати : a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1)^{\frac{1}{x-2}}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \right)$

77. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$

- a) без примене Лопиталовог правила  
b) применом Лопиталовог правила

78. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}$

- a) користећи Лопиталово правило  
b) не користећи Лопиталово правило

79. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$

- a) користећи Лопиталово правило  
b) не користећи Лопиталово правило

80. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 7x} - 2}{\sqrt{x^3 + 3} - 2}$

- a) користећи Лопиталово правило  
b) не користећи Лопиталово правило

81. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$  , где је  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

82. Израчунати  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

## ИСПИТИВАНЈЕ И СКИЦИРАНЈЕ ФУНКЦИЈЕ

83. Испитати ток и скицирати график функције (криве)  $y = \frac{4-4x^2}{x^2-4}$ , а затим израчунати површину у  $xOy$  равни ограничену луком криве и  $x$ -осом.

84. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , а затим израчунати површину ограничену луком криве, осом  $Ox$  и правом  $x=e^2$ .

85. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x}$ , а затим израчунати површину фигуре ограничене луком криве и  $Ox$ -осом.

86. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

87. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$

88. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

89. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x - 3}$ , а затим израчунати површину фигуре ограничене луком криве и  $Ox$ -осом.

90. Дана је крива  $y = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$

а) Испитати и нацртати график функције

б) Израчунати површину фигуре ограничене луком криве и  $Ox$ -осом.

91. а) Испитати и нацртати график функције  $y = x + e^{-x}$

б) Израчунати површину фигуре ограничену луком криве, асимптотом и правама  $x=1$ ,  $x=2$ .

92. Испитати и нацртати график функције  $y = \frac{3-x}{e^x}$ , а затим израчунати површину фигуре ограничене луком криве и осам  $Ox$  и  $Oy$ .

## ИНТЕГРАЛИ

93. Израчунати  $I_1 = \int \frac{x^3 + 7x - 2}{x^3 + 3x^2 + x + 3} dx$        $I_2 = \int x^4 \ln x dx$

94. Израчунати :     $I_1 = \int \frac{dx}{1 + e^x}$        $I_2 = \int \frac{9x}{x^3 - 3x + 2} dx$

95. Израчунати :    a)  $\int (x^2 - 2x) \cos x dx$       b)  $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} dx$

96. Израчунати дужину лука криве  $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$  од  $x=0$  до  $x=1$ .

97. Израчунати дужину лука криве  $y = \frac{2}{\cos x}$  од  $x=0$  до  $x = \frac{\pi}{4}$ .

98. Израчунати :    a)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot (1 + \cos^2 x) dx$       b)  $\int \frac{5x-8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

99. Израчунати :    a)  $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$       b)  $\int \frac{x+1}{x^2 + x+1} dx$

100.    Израчунати :    a)  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$       b)  $\int \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 2} dx$